# 152. Möbius の函数について

林　勲男　(1949.4.12)

Möbiusの函数は 整数論では 正整数 $n$ に対し

$$\mu(n) = 1 \qquad n = 1$$
$$= 0 \qquad n \text{ が素数の平方で割切れる時}$$
$$= (-1)^k \qquad n \text{ が } k \text{ 個の相異る素数の積の時}$$

で定義され、又一般に最小元 0 を有し、有限個の元からなる半順序集合 L 上では

$$\mu(0) = 1$$
$$\mu(x) = -\sum_{y<x} \mu(y)$$

で定義されてゐる (G. *Birkhoff* : *Lattice Theory* p.32) が、以下では稍々形式を改めて この函数を定義し、その二、三の性質を示すことを目的とする。

§1. L を s 個の元からなる半順序集合とする時、二変数の函数 $\varepsilon^x_y$ ; $x, y \in L$ を

$$\varepsilon^x_y = 1 \qquad (x \geqq y \text{ の時})$$

$$\varepsilon^x_y = 0 \qquad (x \ngeqq y \text{ の時})$$ で定義する。

$(\varepsilon^x_y)$ は s 次の行列と考へられ、その行列式は

$$|(\varepsilon^x_y)| = \frac{1}{s!} \sum \pm \varepsilon^{x_1}_{y_1} \varepsilon^{x_2}_{y_2} \cdots\cdots \varepsilon^{x_s}_{y_s}$$

右辺の $\Sigma$ は L の元全部から作られる順列 $(x_1, x_2 \cdots\cdots x_s)$, $(y_1, y_2 \cdots\cdots y_s)$ のすべてについての和であり、次の $\pm$ は、この二つの順列が互に偶置換で移り得るか否かに従って + 又は − をとるのであるが、この中で 0 と異るものは $x_1 \geqq y_1$, $x_2 \geqq y_2$, ……, $x_s \geqq y_s$ であるもののみであり、而もこれは $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …… $x_s = y_s$ の時に限って起ることがわかるから

$$|(\varepsilon^x_y)| = 1$$

故に整数を元素とする $(\varepsilon^x_y)$ の逆行列が存在する。これを $(\mu^x_y)$ で表はせば

$$\sum_{z \in L} \varepsilon^x_z \mu^z_y = \sum_{z \in L} \mu^x_z \varepsilon^z_y = \delta^x_y$$

(但し $\delta^x_y$ は $x = y$ の時 1, $x \neq y$ の時 0)

尚詳しく調べれば $x \ngeqq y$ ならば $\mu^x_y = 0$ が知られるから 結局

$$\sum_{x \geqq z \geqq y} \mu^z_y = \sum_{x \geqq z \geqq y} \mu^x_z = \delta^x_y \qquad (※)$$

を得る。

§2. 最大元，最小元を有し，有限個の元よりなる すべての半順序集合の集合を $\mathcal{L}$ とする。

$\mathcal{L} \ni L$ に対し，§1 で考へた行列を

$\mathbb{E}(L) = (\varepsilon_y^x(L))$，　$M(L) = (\mu_y^x(L))$ で表はすことにし、之を使って $\mathcal{L}$ 上の Möbius の函数 $\mu(L)$，$L \in \mathcal{L}$ を

$$\mu(L) = \mu_0^I(L) \qquad \text{で定義する}$$

但し $I$，$O$ は $L$ の最大元，最小元である。

$\mathcal{L}$ の同型なる元に対し，$\mu$ が等しい値をとることは明らかであるが

(i) $L$ の双対 $L'$ に対して　$\mu(L) = \mu(L')$

(ii) $L_1, L_2$ の直積を $L_1 \cdot L_2$ で表はせば

$$\mu(L_1 \cdot L_2) = \mu(L_1) \cdot \mu(L_2)$$

(iii) $L \ni a, b$　$a \geqq b$ に対し

$$\sum_{a \geqq z \geqq b} \mu(z/b) = \sum_{a \geqq z \geqq b} \mu(a/z) = \delta_b^a$$

但し．$u/v \equiv \{z\,;\, u \geqq z \geqq v\}$

証明．(i) $\varepsilon_y^x(L') = \varepsilon_x^y(L)$ であるから．$\mathbb{E}(L')$ は $\mathbb{E}(L)$ を転置したもの、従って．$M(L')$ は $M(L)$ を転置したものであり．

従って　$\mu_I^O(L') = \mu_O^I(L)$

$O$，$I$ は夫々 $L'$ の最大元，最小元となるから．左辺は $\mu(L')$

又右辺は $\mu(L)$。

(ii) $L_1 \ni x_1, y_1$，$L_2 \ni x_2, y_2$，$L_1 \cdot L_2 \ni x_1 \cdot x_2$．$y_1 \cdot y_2$ とす。

$\varepsilon_{y_1}^{x_1}(L_1) \cdot \varepsilon_{y_2}^{x_2}(L_2)$ を考へれば、之は $x_1 \geqq y_1$、且つ $x_2 \geqq y_2$ の時のみ 1 で，他の場合は 0 であるから．

$$\varepsilon_{y_1 \cdot y_2}^{x_1 \cdot x_2}(L_1 \cdot L_2) = \varepsilon_{y_1}^{x_1}(L_1) \cdot \varepsilon_{y_2}^{x_2}(L_2)$$

故に　$\mathbb{E}(L_1 \cdot L_2) = \mathbb{E}(L_1) \times \mathbb{E}(L_2)$ (Kronecker 積)

逆行列に移れば

$$M(L_1 \cdot L_2) = M(L_1) \times M(L_2)$$

故に $\mu_{y_1\cdot y_2}^{x_1\cdot x_2}(L_1\cdot L_2)=\mu_{y_1}^{x_1}(L_1)\cdot\mu_{y_2}^{x_2}(L_2)$

こゝで $x_1(x_2)$, $y_1(y_2)$ を夫々 $L_1(L_2)$ の最大元, 最小元にとれば 証明すべき式を得る.

(iii) は 詳細は略すが (iv) から わかる.

例　正整数 $n$ に対し $n$ のすべての約数 $m$(正)の作る, 半順序集合を $[n]=\{m\,;\,n\geqq m\}$ で表わす.

$n=n_1\cdot n_2$ で $n_1$ ; $n_2$ が互に素ならば

$$[n]=[n_1]\cdot[n_2]$$ (直積) であり 又 素数 $p$ に対しては,

$$\mu([p^r])=-1 \qquad r=1$$

$$=0 \qquad r\geqq 2.$$ が すぐに判かる

(iii) によって, 最初の $\mu(n)$ の定義と同じものが出ることがわかる.

(April '49)